

التمرين الأول: (04 نقاط) (خاص بشعبة علوم تجريبية)

لدينا 3 صناديق U_1, U_2, U_3 يحتوي الصندوق U_1 على لثوة حمراء واحدة و 9 كرات سوداء، الصندوق U_2 يحتوي على كرتين حمراوين و 8 كرات سوداء، أما الصندوق U_3 يحتوي على ثلاث كرات حمراء و 7 كرات سوداء .

نختار عشوائيا صندوقا من الصناديق الثلاثة و نسحب في آن واحد كرتين من الصندوق المختار

لتكن الأحداث : RR " الحصول على كرتين حمراوين " و NN "الحصول على كرتين سوداوين " ,

و NR " الحصول على كرتين مختلفتين في اللون "

(1) انقل ثم اتمم شجرة الاحتمالات

(2) ليكن المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل سحب عدد الكرات الحمراء المسحوبة .

(أ) حدد قيم المتغير العشوائي X , ثم بين أن $p(X=2) = \frac{4}{135}$

(ب) عين قانون احتمال المتغير العشوائي X , ثم احسب أمله الرياضياتي $E(X)$

(3) علما أننا حصلنا على كرتين حمراوين، ما احتمال أن يكون السحب من الصندوق U_3

التمرين الأول : (04 نقاط) (خاص بشعبة تقني رياضي)

(1) نعتبر المعادلة (E) ذات المجهولين الصحيحين x و y حيث : $11x - 5y = 2$

(أ) اثبت انه إذا كانت الثنائية (x, y) من \mathbb{Z}^2 حلا للمعادلة (E) فإن : $y \equiv 4[11]$

(ب) استنتج حلول المعادلة (E)

(2) ليكن n عددا طبيعيا غير معدوم، نضع $a = 5n + 2$ و $b = 11n + 4$

(أ) عين القيم الممكنة للقاسم المشترك الأكبر للعددين a و b

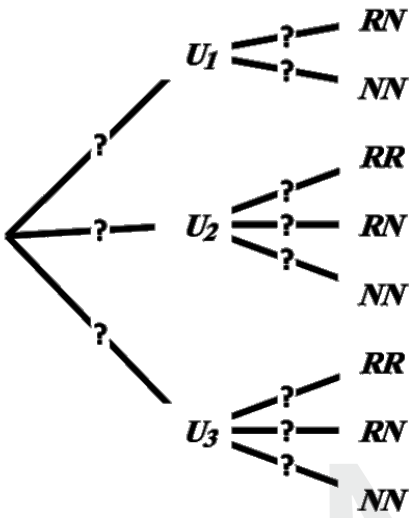
(ب) عين قيم العدد الطبيعي غير المعدوم n بحيث يكون : $PGCD(a; b) = 2$

(ج) استنتج قيم العدد الطبيعي غير المعدوم n بحيث يكون العددين a و b أوليان فيما بينهما

(3) من أجل كل عدد طبيعي n ، نضع $A = 5n^2 + 7n + 2$ و $B = 11n^2 + 15n + 4$

(أ) بين أن العدد $(n + 1)$ يقسم كل من العددين A و B

(ب) استنتج حسب قيم n القاسم المشترك الأكبر للعددين A و B





التمرين الثاني: (05 نقاط)

لتكن المعادلة التفاضلية (1) $y' - 3y = 0$

(1) حل في \mathbb{R} المعادلة التفاضلية (1) ثم عين الحل الخاص f الذي يأخذ القيمة 1 من أجل $x = \frac{-2}{3}$

(2) نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بحددها العام : $u_n = e^{3n+2}$

(أ) بين أن (u_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول، هل هي متقاربة؟

(ب) ادرس اتجاه تغير (u_n)

(3) نعرف المتتالية (v_n) بما يلي : $v_n = \ln(u_n)$

(أ) بين أن (v_n) معرفة من أجل كل عدد طبيعي n

(ب) اثبت أن (v_n) متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول

(ج) احسب المجموع : $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1}$ ثم الجداء $T_n = u_0 \times u_1 \times \dots \times u_{n-1}$

التمرين الثالث: (04 نقاط)

من بين الاقتراحات التالية لكل سؤال جواب واحد صحيح حدده مع التعليل

(1) منحنى الدالة f المعرفة على \mathbb{R}^* بـ : $f(x) = 3x + \frac{e^{-x} - 2}{e^{-x} - 1}$ يقبل مستقيم مقارب مائل بجوار $+\infty$ معادلته :

(أ) $y = 3x$ (ب) $y = 3x + 1$ (ج) $y = 3x + 2$

(2) نعتبر العدد الحقيقي $A(\lambda) = \int_1^\lambda x \ln x dx$ حيث $\lambda > 1$: علما أن الدالة $x \mapsto \frac{x^2}{2} \left[\ln x - \frac{1}{2} \right]$ أصلية للدالة

$x \mapsto x \ln x$, قيمة λ التي من أجلها $A(\lambda) = \frac{1}{4}$ هي :

(أ) $\lambda = e^{-1}$ (ب) $\lambda = \sqrt{e}$ (ج) $\lambda = 2e$

(3) المعادلة $\log(11x^2 - 6x + 5) = \log(x^2) + 1$ تقبل حلان في \mathbb{R} هما :

(أ) $S = \{1; -5\}$ (ب) $S = \{1; 5\}$ (ج) $S = \{-1; -5\}$

(4) المتتالية العددية (U_n) المعرفة على \mathbb{N} بـ $U_n = 2 - 3\left(\frac{1}{4}\right)^n$ هي متتالية

(أ) متزايدة تماما (ب) متناقصة تماما (ج) ليست رتيبة



التمرين الرابع: (07 نقاط)

(I) نعتبر الدالة f المعرفة على المجموعة \mathbb{R} بـ $f(x) = x - (x^2 + 1)e^{-x+1}$

نسمي (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد متجانس (o, \vec{i}, \vec{j})

(1) أ) احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و بين أن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

ب) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x) = 1 + (x-1)^2 e^{-x+1}$

ج) استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها

(2) بين أن المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y = x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$ ثم ادرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) بالنسبة إلى (Δ)

(3) بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث، $1,8 < \alpha < 1,9$

(4) اكتب معادلة ديكارتية للمماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1

(5) بين انه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f''(x) = -(x-1)(x-3)e^{-x+1}$ ثم استنتج أن (C_f) يقبل نقطتي انعطاف يطلب تعيينهما .

(6) احسب : $f(0), f(3)$ ثم ارسم $(T), (\Delta), (C_f)$

(7) ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة ذات المجهول الحقيقي x التالية : $f(x) = x + m$

(II) نضع من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $I_n = \int_0^1 x^n e^{-x+1} dx$

(1) أ) بين أن الدالة G المعرفة على \mathbb{R} بـ : $G(x) = -(x+1)e^{-x+1}$ هي دالة أصلية للدالة $x \mapsto xe^{-x+1}$

ب) احسب I_1

(2) أ) باستعمال الكاملة بالتجزئة بين أن : $I_{n+1} = -1 + (n+1)I_n$ لكل عدد طبيعي غير معدوم n

ب) احسب I_2 .

(3) احسب بـ cm^2 مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) والمستقيمين الذين معادلتيهما:

$x=1$ و $x=0$



التمرين الثاني: (05 نقاط)

	لدينا $y' - 3y = 0$: (1)
0.5	(1) حل المعادلة التفاضلية (1): لدينا $y' - 3y = 0$ يكافئ $y' = 3y$ حلول المعادلة هي الدوال $f(x) = ce^{3x}$ حيث $c \in \mathbb{R}$
0.25	تعيين الحل الخاص f الذي يحقق $f\left(-\frac{2}{3}\right) = 1$: ومنه $f(x) = e^2 \times e^{3x} = e^{3x+2}$ $c = e^2$ $\Leftrightarrow ce^{-2} = 1$ ومنه $ce^{\left(-\frac{2}{3}\right)} = 1$
	(2) لدينا $u_n = e^{3n+2}$
0.5 + 0.25 + 0.25	() تبيان أن المتتالية (u_n) هندسية: لدينا $u_{n+1} = e^{3(n+1)+2} = e^{3n+3+2} = e^3 \times e^{3n+2} = e^3 \times u_n$ ومنه المتتالية (u_n) هندسية أساسها $q = e^3$ وحدها الأول $u_0 = e^2$
0.25	() تقارب المتتالية (u_n) : $q = e^3$ هندسية أساسها $q = e^3$ ومنه $q > 1$ متناعدة
	لدينا $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{3n+2} = +\infty$
0.5	() دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n) : لدينا $u_{n+1} - u_n = e^{3n+5} - e^{3n+2} = (e^3 - 1)e^{3n+2}$ $e^3 - 1 > 0 \Leftrightarrow u_{n+1} - u_n > 0$ ومنه المتتالية (u_n) متزايدة تماما.
	(3) لدينا $v_n = \ln(u_n)$
0.5	() تبيان أن المتتالية (v_n) \mathbb{N} : من أجل كل عدد طبيعي n لدينا $u_n > 0$ ومنه المتتالية (v_n) معرفة من أجل كل عدد طبيعي n . ولدينا $v_n = \ln e^{3n+2} = 3n + 2$
0.25+0.5 0.25+	() تبيان أن المتتالية (v_n) حسابية: لدينا $v_{n+1} - v_n = 3(n+1) + 2 - (3n+2) = 3$ ومنه (v_n) حسابية أساسها $r = 3$ وحدها الأول $v_0 = 2$
0.5	() S_n : $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1} = \frac{n}{2}(v_0 + v_{n-1}) = \frac{n}{2}(2 + 3(n-1) + 2)$ $S_n = \frac{n}{2}(3n+1)$
0.5	() T_n : $T_n = u_0 \times u_1 \times \dots \times u_{n-1} = e^{v_0} \times e^{v_1} \times \dots \times e^{v_{n-1}} = e^{v_0+v_1+\dots+v_{n-1}}$ $T_n = e^{\frac{n}{2}(3n+1)}$



التمرين الثالث: (04 نقاط)

التنقيط	التبرير	الجواب	الاقتراح
2×0.5	$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 3x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x} - 2}{e^{-x} - 1} = 2$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (3x + 2)] = 0$	الإجابة (ج) $y = 3x + 2$	1
2×0.5	$A(\lambda) = \int_1^\lambda x \ln x dx = \left[\frac{x^2}{2} \left(\ln x - \frac{1}{2} \right) \right]_1^\lambda = \frac{\lambda^2}{2} \left(\ln \lambda - \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{4}$ $A(\lambda) = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{\lambda^2}{2} \left(\ln \lambda - \frac{1}{2} \right) = 0$ ومنه $\lambda = \sqrt{e}$ أو $\lambda = 0$ مرفوض لأن: $(\lambda > 1)$	الإجابة (ب) $\lambda = \sqrt{e}$	2
2×0.5	$\log(11x^2 - 6x + 5) = \log x^2 + 1$ $\frac{\ln(11x^2 - 6x + 5)}{\ln 10} = \frac{\ln x^2}{\ln 10} + 1$ $x^2 - 6x + 5 = 0$ $x = 1, x = 5$	الإجابة (ب) $S = \{1, 5\}$	3
2×0.5	$u_{n+1} - u_n = \left(2 - 3 \left(\frac{1}{4} \right)^{n+1} \right) - \left(2 - 3 \left(\frac{1}{4} \right)^n \right) = -3 \left(\frac{1}{4} \right)^{n+1} + 3 \left(\frac{1}{4} \right)^n = \frac{9}{4} \left(\frac{1}{4} \right)^n > 0$	الإجابة (أ) متزايدة تماما	4

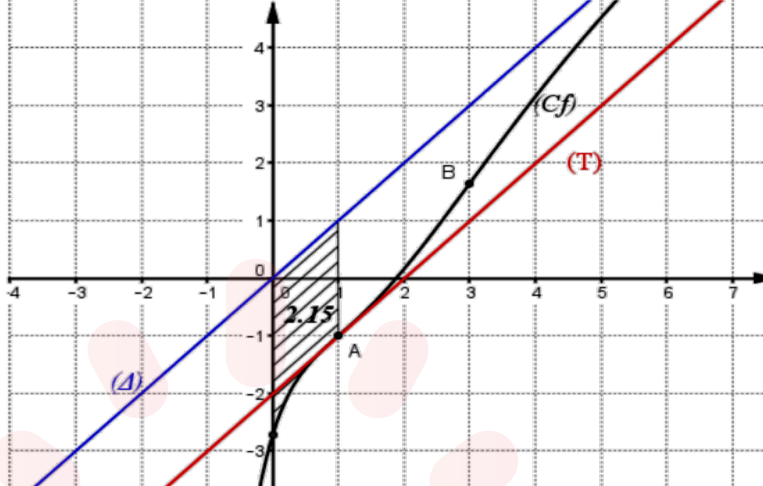
التمرين الرابع: (07 نقاط)

0.25	<p>I. لدينا: $f(x) = x - (x^2 + 1)e^{-x+1}$</p> <p>(1) حساب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$:</p> $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x+1} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} -(x^2 + 1)e^{-x+1} = -\infty \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} [x - (x^2 + 1)e^{-x+1}] = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty \end{cases}$									
0.25	<p>• تبيان أن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$:</p> <p>لدينا: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [x - (x^2 + 1)e^{-x+1}] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - \frac{x^2 + 1}{e \times e^x} \right)$</p>									
	<p>أي $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - \frac{x^2}{e^x} \times \frac{1}{e} + \frac{1}{e} \times \frac{1}{e^x} \right) = +\infty$ لأن</p> $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0 \end{cases}$									
0.5	<p>• (ب) تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي x: $f'(x) = 1 + (x-1)^2 e^{-x+1}$</p> <p>لدينا: $f'(x) = 1 - [2xe^{-x+1} + (x^2 + 1)(-e^{-x+1})] = 1 - (2x - x^2 - 1)e^{-x+1}$</p> <p>وبالتالي: $f'(x) = 1 + (x^2 - 2x + 1)e^{-x+1} = 1 + (x-1)^2 e^{-x+1}$</p>									
0.25	<p>(ج) استنتاج اتجاه تغير الدالة f:</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>x</th> <th>$-\infty$</th> <th>$+\infty$</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>$(x-1)^2 e^{-x+1}$</td> <td></td> <td>+</td> </tr> <tr> <td>$f'(x)$</td> <td></td> <td>+</td> </tr> </tbody> </table>	x	$-\infty$	$+\infty$	$(x-1)^2 e^{-x+1}$		+	$f'(x)$		+
x	$-\infty$	$+\infty$								
$(x-1)^2 e^{-x+1}$		+								
$f'(x)$		+								



0.5	<p>• جدول التغيرات :</p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td style="padding: 5px;">x</td> <td style="padding: 5px;">$-\infty$</td> <td style="padding: 5px;">$+\infty$</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">$f'(x)$</td> <td colspan="2" style="padding: 5px; text-align: center;">+</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">$f(x)$</td> <td colspan="2" style="padding: 5px; text-align: center;"> $-\infty \xrightarrow{\hspace{10em}} +\infty$ </td> </tr> </table>	x	$-\infty$	$+\infty$	$f'(x)$	+		$f(x)$	$-\infty \xrightarrow{\hspace{10em}} +\infty$		
x	$-\infty$	$+\infty$									
$f'(x)$	+										
$f(x)$	$-\infty \xrightarrow{\hspace{10em}} +\infty$										
0.25	<p>(2) تبيان أن المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y = x$ يقارب مائل لـ (C_f) عند $+\infty$: لدينا : $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - (x^2 + 1)e^{-x+1} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 e^{-x+1} + e^{-x+1}) = 0$ ومنه (Δ) مستقيم يقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$</p>										
0.5	<p>• دراسة الوضعية النسبية للمنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) : لدينا : $f(x) - x = x - (x^2 + 1)e^{-x+1} - x = -(x^2 + 1)e^{-x+1}$ إذن $f(x) - x < 0$ ومنه (C_f) يقع تحت المستقيم (Δ) من أجل كل عدد حقيقي x</p>										
0.5	<p>(3) تبيان أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1.8 < \alpha < 1.9$: • لدينا f مستمرة ورتبية تماما على المجال $[1.8; 1.9]$ ولدينا $f(1.8) = 1.8 - ((1.8)^2 + 1)e^{-1.8+1} = -0.11$ $f(1.9) = 1.9 - ((1.9)^2 + 1)e^{-1.9+1} = 0.03$ وبالتالي $f(1.8) \times f(1.9) < 0$ حسب مبرهنة ال قيم المتوسطة المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1.8 < \alpha < 1.9$.</p>										
0.5	<p>(4) كتابة معادلة ديكارتية للمماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1 : $y = f'(1)(x-1) + f(1)$ $y = 1 \times (x-1) - 1 = x - 2$ أي $(T) : y = x - 2$</p>										
01	<p>(5) تبيان أن $f''(x) = -(x-1)(x-3)e^{-x+1}$: لدينا : $f''(x) = 2(x-1)e^{-x+1} + (x-1)^2 \times (-e^{-x+1}) = (x-1)e^{-x+1}(2-x+1)$ أي $f''(x) = -(x-1)(x-3)e^{-x+1}$.</p> <p>• استنتاج أن (C_f) يقبل نقطتي انعطاف : - جدول إشارة $f''(x)$:</p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td style="padding: 5px;">x</td> <td style="padding: 5px;">$-\infty$</td> <td style="padding: 5px;">1</td> <td style="padding: 5px;">3</td> <td style="padding: 5px;">$+\infty$</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">$f''(x)$</td> <td style="padding: 5px;"></td> <td style="padding: 5px;">-</td> <td style="padding: 5px;">+</td> <td style="padding: 5px;">-</td> </tr> </table> <p>• المشتقة الثانية $f''(x)$ تتعدم من أجل القيمتين $x = 1$ و $x = 3$ مغيرة إشارتها إذن النقطتين $A(1; f(1)), B(3; f(3))$ نقطتي انعطاف للمنحنى (C_f)</p>	x	$-\infty$	1	3	$+\infty$	$f''(x)$		-	+	-
x	$-\infty$	1	3	$+\infty$							
$f''(x)$		-	+	-							



0.75	<p>(6) حساب $f(3), f(0)$: $f(3) = 3 - 9e^{-2} = 1.65, f(0) = -e = -2.71$ الرسم:</p> 
0.5	<p>(7) المناقشة البيانية لحلول المعادلة: $f(x) = x + m$</p> <ul style="list-style-type: none"> • هي فواصل نقاط تقاطع المنحني (C_f) مع المستقيم ذي المعادلة $y = x + m$ الموازي لكل من (Δ) و (T). • إذا كان $m \in]-\infty; -e[$ المعادلة تقبل حلا وحيدا سالبا. • إذا كان $m = -e$ المعادلة تقبل حلا وحيدا معدوما. • إذا كان $m \in]-e; 0[$ المعادلة تقبل حلا وحيدا موجبا. • إذا كان $m \in [0; +\infty[$ المعادلة ليس لها حلا.
0.25	<p>II. من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n نضع: $I_n = \int_0^1 x^n e^{-x+1} dx$</p> <p>1- أ) تبين أن الدالة G المعرفة على \mathbb{R} ب: $G(x) = -(x+1)e^{-x+1}$ هي دالة أصلية للدالة g حيث $g(x) = xe^{-x+1}$ على المجموعة \mathbb{R}:</p> <ul style="list-style-type: none"> • لدينا: $G'(x) = -[e^{-x+1} - (x+1)e^{-x+1}] = -(e^{-x+1} - xe^{-x+1} - e^{-x+1}) = xe^{-x+1} = g(x)$ <p>ومنه G دالة أصلية للدالة g على \mathbb{R}.</p>
0.25	<p>ب) حساب I_1:</p> <ul style="list-style-type: none"> • لدينا: $I_1 = \int_0^1 xe^{-x+1} dx = [- (x+1)e^{-x+1}]_0^1 = -2e^0 + e = e - 2$
0.25	<p>2- أ) تبين أن $I_{n+1} = -1 + (n+1)I_n$</p> <ul style="list-style-type: none"> • لدينا: $I_{n+1} = \int_0^1 x^{n+1} e^{-x+1} dx$ • نضع: $u(x) = x^{n+1}$ ومنه $u'(x) = (n+1)x^n$ • ونضع: $v(x) = e^{-x+1}$ ومنه $v'(x) = -e^{-x+1}$ • وبالتالي: $I_{n+1} = \int_0^1 x^{n+1} e^{-x+1} dx = [-x^{n+1} e^{-x+1}]_0^1 - \int_0^1 (n+1)x^n (-e^{-x+1}) dx$ • ومنه: $I_{n+1} = -1 + (n+1) \int_0^1 x^n e^{-x+1} dx = -1 + (n+1)I_n$
0.25	<p>ب) حساب I_2:</p> $I_2 = -1 + (1+1)I_1 = -1 + 2(e-2) = 2e - 5$
0.25	<p>3- حساب المساحة للحيز المستوي المحدد بالمنحني (C_f) والمستقيم (Δ) والمستقيمين الذين معادلتيهما $x=1, x=0$:</p> $S = \int_0^1 [y - f(x)] dx = \int_0^1 x - x + (x^2 + 1)e^{-x+1} dx = \int_0^1 (x^2 + 1)e^{-x+1} dx$ <p>أي $S = \int_0^1 x^2 e^{-x+1} dx + \int_0^1 e^{-x+1} dx = I_2 + [-e^{-x+1}]_0^1$</p> $S = (2e - 5 - 1 + e)us = (3e - 6)cm^2 = 2.15cm^2$